Association Technique Maritime et Aéronautique *SESSION 1979*
47^rue de Monceau, 75008 Paris

Action de la houle sur un flotteur élancé à Froude zéro en profondeur finie

par

J. BOUGIS
Chercheur ENSM

et

A. CLEMENT
Chercheur IFP-ENSM

SOMMAIRE

Ce problème physiquement complexe, est ramené à la recherche du potentiel des vitesses de l'écoulement autour du flotteur. Les conditions aux limites étant linéarisées et affichées sur leur position moyenne, le potentiel total est obtenu comme la superposition des potentiels incidents, de diffraction et de radiation.

Les coefficients hydrodynamiques sont calcules par la méthode classique dite : "méthode des tranches" à laquelle des éclaircissements sont apportes en ce qui concerne sa validité pour les différentes incidences de la houle.

Chaque problème bidimensionnel est résolu par une méthode de singularités mixtes qui satisfont toutes les conditions aux limites, y compris la condition de glissement sur le fond suppose plan et horizontal. Un soin particulier a été apporté à l'élimination des fréquences irrégulières.

Le programme de calcul tridimensionnel global qui donne amplitudes et phases desmouvements (à l'exception du cavalement) a été testé en calculant les mouvements d'un pétrolier de 24O 000 Tdw pour lequel les résultats expérimentaux obtenus lors d'essais en bassin au NSMB sont tirés d'un article de G. VAN OORTMERSSEH. Cette confrontation fait ressortir que la prédiction des mouvements est bonne dans les cas pour lesquels les hypothèses de cette théorie sont vérifiées.

WAVE ACTION UPON A SLENDER FLOATING BODY ON SHALLOW WATER

SUMMARY

This physically complex problem is reduced to the determination of the potential of the flow-around the immersed part of the body. Boundary conditions are linearized and calculated at the mean boundary position. The total potential is obtained by summing incident, diffraction and radiation potentials.

The hydrodynamic coefficients are calculated with help of the classical strip method. A discussion concerning the validity of the method is given, mainly centered on the angle between the body axis and the incident wave propagation direction.

Each 2D problem is solved using dipole and source singularities which satisfy every boundary conditions, including the condition relative to water bottom at a constant depth. The irregular frequency phenomenon has been handled with a particular care.

Then we have compared our results with experimental data for a 240.000 Tdw tanker from an article by G. VAN OORTMERSSEN. The agreement is good within the validity domain of our hypothesis.

INTRODUCTION

Par souci de clarté, nous avons décomposé notre étude en trois parties.

Dans la première nous abordons le problème tridimensionnel et établissons les équations qui le régissent, puis nous montrons qualitativement qu'un résultat convenable peut être espéré moyennant une hypothèse supplémentaire en utilisant une méthode de calcul bidimensionnelle pour obtenir les potentiels de radiation.

La deuxième partie est consacrée à la présentation d'une méthode de résolution du problème bidimensionnel, que des résultats concernant des cylindres infiniment longs viennent valider.

Enfin, nous établissons dans la troisième partie, les termes tridimensionnels à partir des éléments .bidimensionnels et comparons les résultats numériques et les résultats expérimentaux.

A - PROBLEME TRIDIMENSIONNEL ET METHODE DES TRANCHES

1. Hypothèses générales de l'hydrodynamique

Avant d'appliquer une méthode de calcul, à la résolution d'un problème tridimensionnel, il est nécessaire de formuler convenablement ce dernier.

1.1. Définition du système de coordonnées

L'étude sera conduite en considérant un repère (0 ;x,y,z) direct, lie à la position moyenne du navire. Les axes Ox et Oy sont situés dans le plan de flottaison, Ox est parallèle à l'axe de la carène et orienté vers l'avant de celle-ci. L'axe Oz est vertical ascendant et passe par le centre de gravité G de coordonnées $(0, 0, z_G)$.

Les mouvements sont caractérisés par la variable η_j $j \in [1/6]$ où j désigne respectivement le cavalement, l'embardée, le pilonnement, le roulis, le tangage et le lacet (figure 1).

La normale extérieure généralisée est définie par ses six composantes n_1, n_2, n_3, $n_4 = n_3 y - n_2 z$, $n_5 = n_1 z - n_3 x$, $n_6 = n_2 x - n_1 y$

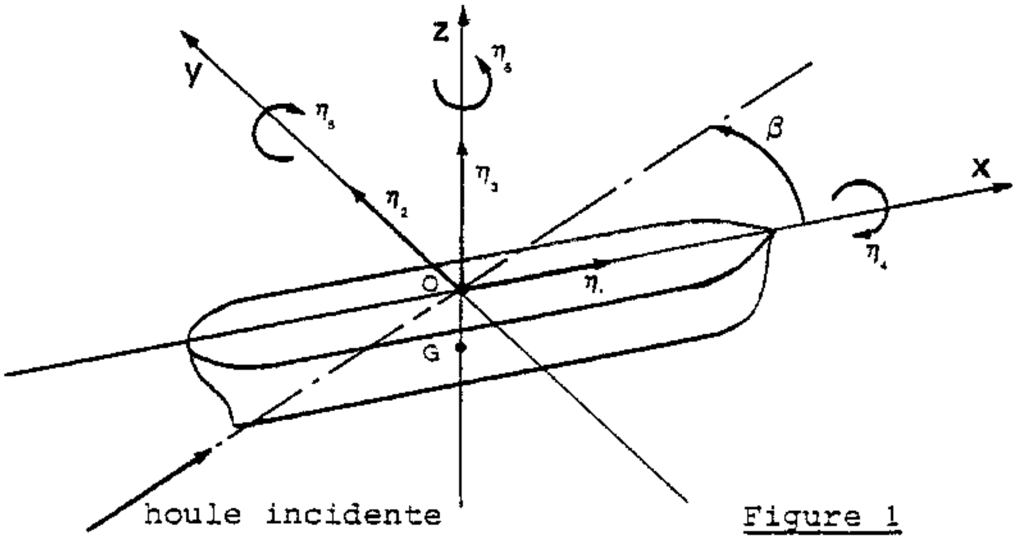

Figure 1

1. 2. *Hypothèses relative aux mouvements périodiques du navire.*

Afin de pouvoir formuler le problème hydromécanique, nous sommes conduits à définir les hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons,

(H.1) Les forces de viscosité sont négligeables devant les forces d'inerties. Le fluide est supposé parfait et incompressible.

(H.2) L'écoulement est irrotationnel, d'où l'existence d'un potentiel des vitesses, noté Φ, tel que $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\ \Phi$.

(H.3) Le navire est sollicité par une houle incidente d'AIRY, de pulsation w d'incidence β et d'amplitude A faible vis à vis des dimensions du navire.

(H.4) Les tensions superficielles sont négligeables et la pression est constante au-dessus de la surface libre.

(H.5) Le navire oscille comme une structure rigide, non déformable, à six degrés de liberté en régime harmonique forcé, correspondant à la réponse aux excitations de la houle, avec des amplitudes faibles par rapport aux dimensions du navire.

1.3. Conséquence de ces hypothèses

En vertu des hypothèses précédentes, nous pouvons admettre la linéarité du potentiel des vitesses, et donc la superposition des divers états, ce qui permet d'écrire le potentiel total Φ_T sous la forme

$$\Phi_T = \Phi_I + \Phi_D + \sum_{j=1}^{6} \eta_j \Phi_j \tag{1}$$

en désignant par :

Φ_I le potentiel de la houle incidente

Φ_D le potentiel de la houle réfléchie-diffractée, le navire étant supposé immobile

Φ_j le potentiel de radiation engendré par un mouvement harmonique forcé d'amplitude unitaire dans le mode j sur un plan d'eau initialement au repos.

Dès lors chaque potentiel vérifie les conditions suivantes :

- Equation de conservation :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \Delta\Phi = 0 \tag{2}$$

- Le potentiel s'annule à l'infini
- Le potentiel vérifie la condition de surface libre qui s'écrit en vertu de (H.4)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \tag{3}$$

- Le potentiel vérifie la condition de radiation à l'infini ou la condition de surface libre des fluides presques parfaits
- Le potentiel vérifie la condition de glissement sur la carène et sur le fond, conditions qui s'écrivent si $\vec{V}_E$ est la vitesse d'entraînement de la carène c, et h la profondeur :

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_c = \vec{V}_E.\vec{n} \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \tag{5}$$

2. Equation des mouvements harmoniques

2.1. Equation de NEWTON

L'équation de NEWTON stipule l'équivalence, à chaque instant, entre le torseur des forces d'inerties et le torseur des forces extérieures appliquées au système mécanique constitue ici du seul flotteur.

Ce dernier torseur est la somme de deux termes qui sont :

- le torseur des forces de gravité
- le torseur des forces de pression exercées par le fluide.

En vertu de l'équation de LAGRANGE linéarisée (du fait des hypothèses énoncées au paragraphe (1.2)) qui s'écrit :

$$p = -\rho g z - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \tag{6}$$

ce deuxième torseur se décompose en deux termes qui sont d'une part le torseur des forces hydrostatiques et d'autre part le torseur des forces hydrodynamiques.

Si nous reportons dans (6) l'expression du potentiel donnée en (.1), nous pouvons écrire le torseur hydrodynamique sous la forme d'une somme de deux termes dont l'un contient les potentiels Φ_I et Φ_D (c'est le torseur des forces d'excitation), et l'autre les potentiels de radiation et comporte deux parties ; l'une en phase avec la vitesse et l'autre en phase avec l'accélération.

L'équation de NEWTON s'écrit donc :

$$([M] + [MA])\ [\ddot{\eta}] + [TA][\dot{\eta}] + [C][\eta] = [F] \qquad (7)$$

où
M est la matrice des masses et inerties
MA est la matrice des masses d'eau ajoutée
TA est la matrice des termes d'amortissement
C est la matrice des termes de rappel hydrostatique
F est la matrice des forces d'excitation.

D'après l'hypothèse de linéarité,

MA et TA ne dépendent que de la forme de la carène et de w
M et C ne dépendent que du flotteur et de sa position moyenne.

2. 2 Forme harmonique de l'équation des mouvements

En vertu de l'hypothèse (H.5), les mouvements sont harmoniques, ce qui permet d'écrire :

$$[\eta] = [\eta^*] \cos \omega t + [\eta^{**}] \sin \omega t$$

$$[\dot{\eta}] = [\dot{\eta}^*] \cos \omega t + [\dot{\eta}^{**}] \sin \omega t = \omega[\eta^{**}] \cos \omega t - \omega[\eta^*] \sin \omega t$$

$$[\ddot{\eta}] = [\ddot{\eta}^*] \cos \omega t + [\ddot{\eta}^{**}] \sin \omega t = -\omega^2[\eta^*] \cos \omega t - \omega^2[\eta^{**}] \sin \omega t$$

L'équation (7) peut alors se mettre sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} -\omega^2\left\{[M] + [MA]\right\} + [C] & \omega[TA] \\ -\omega[TA] & -\omega^2\left\{[M] + [MA]\right\} + [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\eta^*] \\ [\eta^{**}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F^*] \\ [F^{**}] \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Remarque importante :

La symétrie longitudinale suivant le plan Oxz, qui est généralement réalisée sur un navire, a pour conséquence de découpler le système de douze équations à douze inconnues (η_j^*, η_j^{**}) $j \in [1,6]$ en deux sous-systèmes indépendants de six equations à six inconnues.

$$\text{I}\ \begin{cases}\text{Cavalement}\\ \text{Pilonnement}\\ \text{Tangage}\end{cases} \qquad \text{II}\ \begin{cases}\text{Embardée}\\ \text{Roulis}\\ \text{Lacet}\end{cases}$$

3. Détermination de la force d'excitation

3.1. Force due à la houle incidente (force de FROUDE KRILOFF)

La force d'excitation due à la houle incidente provient du terme de pression P_I

$$P_I = -\rho \frac{\partial \Phi_I}{\partial t} \qquad (9)$$

Puisque Φ_I est une donnée du problème, nous pouvons calculer P_I

en tout point de la carène. La force qui en résulte s'écrit dans le mode j

$$F_{I_j} = - \iint_C P_I \, n_j \, ds = \rho \iint_C \frac{\partial \Phi_I}{\partial t} n_j \, ds \qquad (10)$$

et peut être calculée avec toute la précision désirée.

3.2. Force due à la réflexion diffraction

La force engendrée par la houle réfléchie diffractée provient du terme de pression P_D :

$$P_D = - \rho \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \qquad (11)$$

où Φ_D est une inconnue du problème. La force qui en résulte s'écrit dans le mode j :

$$F_{D_j} = - \iint_C P_D \, n_j \, ds = \rho \iint_C \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} n_j \, ds \qquad (12)$$

Ce torseur ne peut être calculé sous cette forme qu'après la résolution du problème de diffraction. Cependant le théorème d'HASKIND permet d'écrire ce torseur en fonction du potentiel de la houle incidente Φ_I et des potentiels de radiation Φ_j

$$F^*_{D_j} = - \rho \iint_C \Phi^*_j \frac{\partial \Phi^{**}_I}{\partial n} ds - \rho \iint_C \Phi^{**}_j \frac{\partial \Phi^*_I}{\partial n} ds$$

$$F^{**}_{D_j} = \rho \iint_C \Phi^*_j \frac{\partial \Phi^*_I}{\partial n} ds - \rho \iint_C \Phi^{**}_j \frac{\partial \Phi^{**}_I}{\partial n} ds \qquad (13)$$

L'intérêt de l'application de ce théorème réside dans le fait que nous pouvons calculer la force due à la diffraction sans résoudre le problème hydrodynamique qui s'y rattache puisque la connaissance de Φ_D n'est plus nécessaire pour déterminer F_D

4• Détermination des masses d'eau ajoutée et des termes d'amortissement

Les masses d'eau ajoutée et les termes d'amortissement proviennent du terme de pression P_R :

$$P_R = - \rho \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial t} (n_j \, \Phi_j) \qquad (14)$$

et se mettent après un calcul assez simple sous la forme (15)

$$MA_{ij} = - \frac{\rho}{\omega^2} \iint_C \Phi^*_j \frac{\partial \Phi^*_i}{\partial n} ds$$

$$TA_{ij} = - \frac{\rho}{\omega} \iint_C \Phi^{**}_j \frac{\partial \Phi^*_i}{\partial n} ds \qquad (15)$$

Le calcul de ces termes MA_{IJ}. et TA_{ij} nécessite la connaissance des potentiels des vitesses Φ^* et Φ^{**} j $\in$ [l,6] et donc la résolution des six problèmes de radiation.

5• Application de la méthode des tranches à la résolution des problèmes de radiation

5.1. *Introduction*

Nous avons montré dans les paragraphes précédents que nous saurons résoudre le problème tridimensionnel concernant les mouvements d'un navire soumis à la houle incidente pour un nombre de FROUDE nul, dès que nous connaîtrons en tout point de la carène les potentiels de radiation Φ_j^* et Φ_j^{**} $j \in [1,6]$.

Dans le but de simplifier les calculs en évitant la résolution des six problèmes hydrodynamiques tridimensionnels, nous ferons une hypothèse supplémentaire au sujet des caractéristiques du navire.

5.2. *Hypothèse du navire élancé* (H. 6)

Supposons que le navire étudié est élancé, c'est-à-dire que ses dimensions transversales sont suffisamment petites devant sa dimension longitudinale pour que nous puissions négliger les vitesses et les accélérations du fluide suivant l'axe Ox, ainsi que les effets d'extrémités.

Cette hypothèse étant formulée, recherchons une solution à variable séparée de la forme

$$\Phi(x,y,z) = X(x) \cdot \Psi(y,z) \tag{16}$$

Le laplacien de la fonction potentiel des vitesses s'écrit alors :

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \frac{d^2}{dx^2} X(x) \cdot \Psi(y,z) + X(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(y,z) \right] = 0 \; ; \tag{17}$$

d'où, en divisant les deux membres de cette équation par $\Phi(x,y,z)$:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = - \frac{1}{\Psi(y,z)} \Delta\Psi(y,z) = c^{te} = - k^2 \tag{18}$$

La constante ne peut qu'être négative puisque X(x) doit rester bornée quand x tend vers l'infini ; puisque l'équation (18) est vérifiée quelque soit la valeur de k réel, la solution générale est la somme sur k des solutions élémentaires (19)

$$\begin{aligned} &X_k(x) = \nu(k)\, e^{ikx} \qquad \text{avec } \nu \in \mathbb{C} \\ &\Psi_k(y,k) \text{ vérifie } \Delta\psi_k(y,z) = k^2\, \psi_k(y,z) \end{aligned} \tag{19}$$

c'est-à-dire

$$\Phi(x\,;\,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x,y,z)\, dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(k)\, e^{ikx}\, \Psi_k(y,z)\, dk \tag{20}$$

D'après l'hypothèse (H.6) la fonction x(x) et ses dérivées premières et secondes sont assujetties à varier très lentement. Il s'en suit que seules les valeurs de k très petites sont susceptibles de vérifier les conditions qu'elle impose, et que X(x) peut être convenablement approchée par une fonction en escalier $\bar{X}(x)$ qui s'écrit :

$$\bar{X}(x) = X(x_n) \quad \forall\, x \in J_n = \left[x_n - \frac{\Delta x_n}{2} \;,\; x_n + \frac{\Delta x_n}{2} \right[\tag{21}$$

Sur un tel intervalle l'équation aux valeurs propres

$$\Delta\Psi_k(y,z) = k^2\; \Psi_k(y,z) \tag{22}$$

sera remplacée par l'équation de LAPLACE

$$\Delta\Psi_o(y,z) = 0 \tag{23}$$

Remarquons que la solution $\Psi_o(y,z)$ de (23) dépend des conditions aux limites imposées et donc de la forme de la carène au point d'abscisse x_n qui sera supposée constante sur l'intervalle. Dès lors la carène est elle-même approchée par une succession de tranches cylindriques d'épaisseur Δx_n, et la solution $\Psi_{on}(y,z)$ prend en compte de manière globale la variation $\Phi(x,y,z)$ en fonction de X. L'approximation faite est donc moins grossière qu'il semblerait à la seule vue des équations (21) et (23).

La solution tridimensionnelle $\Phi(x,y,z)$ est finalement remplacée par une autre solution tridimensionnelle $\Phi'(x,y,z)$ obtenue par la résolution de N problèmes bidimensionnels.

5.3. Restrictions dues à la méthode des tranches

La méthode que nous avons employée revient à remplacer chaque potentiel Φ_j par un potentiel Φ'_j obtenu en résolvant l'équation (23) autant de fois qu'il y a d'escaliers dans notre approximation de X(x). Remarquons que nous ne déterminerons pas la solution approchée du problème tridimensionnel mais la solution "exacte" d'un problème approché.

Une restriction importante de cette méthode de calcul réside dans le fait que nous ne saurions l'utiliser pour calculer Φ_1 et que nous devons nous contenter de la connaissance de Φ_j $j \in [2,6]$. Il est donc nécessaire d'analyser les conséquences que cela entraine sur les résultats des mouvements.

La détermination de Φ'_j correspondant au régime forcé de radiation, n'a rien à voir avec l'incidence β de la houle. Cette méthode de calcul de Φ'_j n'apporte donc a priori, aucune restriction sur le domaine de validité des incidences.

Cependant, l'impossibilité de déterminer Φ'_1 nous conduit à supprimer deux équations et deux inconnues (n_1* et n_1**) du système (8). Ceci n'a aucune conséquence sur les résultats du deuxième sous système qui n'est pas couplé avec le cavalement dans le cas d'un navire symétrique. Quant aux résultats concernant le pilonnement et le tangage, ils sont affectés par la suppression du cavalement par l'intermédiaire des termes de couplage MA_{13} MA_{15} , TA_{13} et TA_{15}. L'analyse des résultats obtenus pour ces termes (par voie expérimentale ou par calculs tridimensionnels) montre qu'ils sont très faibles devant les termes MA_{33} , MA_{35} , TA35 et TA55 pour un navire vérifiant convenablement l'hypothèse (H.6)(un ou deux ordres de grandeur) et qu'ainsi les résultats obtenus pour les mouvements de pilonnement et de tangage sont peu affectés par l'angle d'incidence β.

6 - Conclusion

Nous avons vu que l'application de la méthode des tranches nécessite la détermination des potentiels bidimensionnels $\psi_{on}(y,z)$.

Nous proposons, dans la deuxième partie, une méthode de calcul des potentiels de radiation par unité de longueur pour un cylindre indéfini. Nous en déduirons les coefficients hydrodynamiques de chaque tranche d'épaisseur unité.

B - COEFFICIENTS HYDRODYNAMIQUES D'UN CYLINDRE INDEFINI EN MOUVEMENT FORCE SUR UN PLAN D'EAU DE PROFONDEUR FINIE

1. Le problème cinématique

Nous dénommerons ainsi la détermination du potentiel des vitesses de l'écoulement dans la tranche d'abscisse x_n soit $\psi_{on}(y,z)$ du paragraphe A.5.2.

On considère un flotteur cylindrique de section quelconque dont les génératrices sont parallèles à un axe A qui appartient à la surface libre d'un domaine fluide de profondeur uniforme h. (Figure 2).

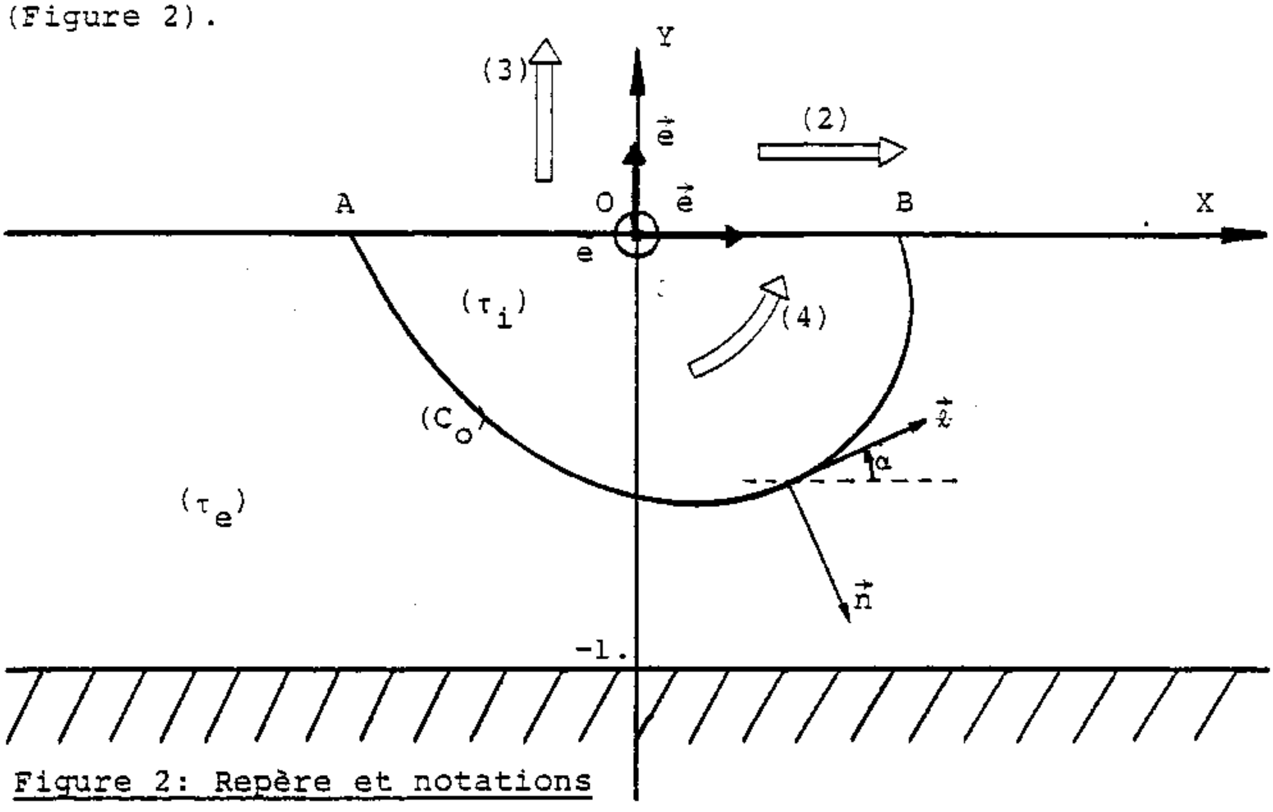

Figure 2: Repère et notations

Dans tout ce qui suit, nous nous placerons dans le plan de la variable complexe adimensionnalisée $Z = X + iY$ avec $X = x/h$, $Y = y/h$

Les trois mouvements forcés élémentaires que pourra subir le cylindre porteront les mêmes indices que précédemment, soit :

k = 2 pour l'embardée
k = 3 pour le pilonnement
k = 4 pour le roulis autour de 0.

1.1. Hypothèses

Les hypothèses H1, H2 et H4 énoncées pour le problème tridimensionnel sont reprises ici, et nous supposerons pour notre part que les amplitudes des mouvements forcés sont petites vis à vis des dimensions du corps.

Comme nous résolvons tout le problème dans la tranche d'indice n, nous omettrons cet indice dans toute cette partie -B-.

Les conséquences immédiates des hypothèses ci-dessus sont les suivantes :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad}\ \psi \tag{24}$$

$\Delta\Phi = 0$ a tout instant dans le domaine (τ_e) (25)

Là encore la solution sera recherchée sous la forme :

$$\psi = R_e\ \Phi\ e^{-i\omega t} \tag{26}$$

que nous noterons :

$$\psi(M,t) = \Phi^{*}(M)\cos\omega t + \Phi^{**}(M)\sin\omega t \tag{27}$$

Nous étendrons d'ailleurs cette notation aux autres grandeurs physiques.

1.2. Formulation mathématique des trois problèmes cinématiques

Les trois potentiels recherchés devront satisfaire les conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta\Phi_k(M) = 0 & \text{dans } (\tau_e) & \\ \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial Y} = k_o\,\Phi_k & \text{sur le plan } Y = 0 & k_o = \dfrac{\omega^2}{g} \\ \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial Y} = 0 & \text{sur le plan } Y = -1 & \end{array}\right\}\ k = 2,3,4 \qquad \begin{array}{r}(28)\\(29)\\(30)\end{array}$$

Les vagues émises par le corps s'en éloignent indéfiniment. (31)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n} = \vec{e}_k\cdot\vec{n} \\ \dfrac{\partial\Phi_4}{\partial n} = (\vec{e}_4 \wedge \overrightarrow{OM'})\cdot\vec{n} \end{array}\right\}\ M' \in C_o \qquad \begin{array}{r} k = 2,3 \quad (32)\\ (33)\end{array}$$

C_0 est la ligne géométrique qui représente la directrice du cylindre en position d'équilibre hydrostatique. Elle délimite deux domaines fluides (τ_i) et (τ_e) (cf. figure 2).

Considérons initialement la bande fluide comprise entre Y=0 et Y=-l. Admettons que sur C_o sont réparties des singularités du type sources puisantes avec une densité $\sigma(M')$, et du type doublets normaux puisants avec une densité $\mu(M')$.

Le potentiel des vitesses engendré par chacune de ces singularités satisfait par construction les conditions (28) , (29),

(30) et (31). Pour la source seule, la formulation mathématique de la fonction de GREEN (50), (51), (52) a été donnée par F. JOHN / 1/ puis par J.V. WEHAUSEN et E.V. LAITONE /2 /. Elle a été établie plus simplement depuis par P. GUEVEL / 3/ et pour notre part nous avons calculé les expressions correspondantes relatives aux doublets normaux et aux segments supportant des densités constantes, ou linéaires, de sources ou de doublets.

La distribution D définie par $\sigma(M')$ et $\mu(M')$ engendre dans tout le domaine fluide, y compris dans (τ_i), un potentiel φ dont les propriétés intrinsèques à la traversée d'une telle distribution sont les suivantes :

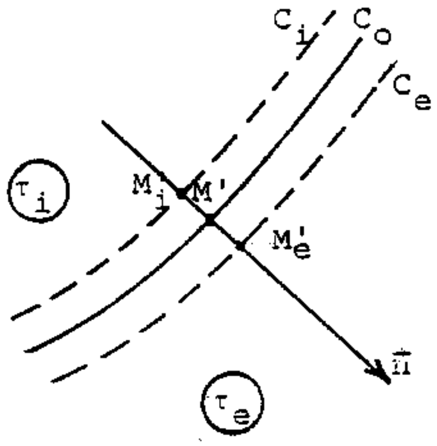

Figure 3.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(M_e') - \frac{\partial\varphi}{\partial n}(M_i') = \sigma(M') \tag{34}$$

$$\varphi(M_e') - \varphi(M_i') = -\mu(M') \tag{35}$$

M'_i et M_e' étant infiniment voisins de $M' \in C_o$.

Dans la résolution de notre problème, les valeurs prises par le potentiel dans le domaine (τ_i) sont arbitraires.

Nous imposerons alors

$$\varphi(M_i') = 0 \qquad M_i' \in C_i \tag{36}$$

ce qui implique :

$$D \left\{ \begin{array}{l} \sigma(M') = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}(M_e') \\ \\ \mu(M') = -\ \varphi(M_e') \end{array} \right. \qquad \text{soit encore } D_k \left\{ \begin{array}{l} \sigma_k(M') = \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial n}(M_e') \\ \\ \mu_k(M') = -\ \Phi_k(M_e') \end{array} \right. \tag{37}$$

puisque les potentiels Φ_k que nous recherchons s'apparentent à ce potentiel extérieur. $\varphi(M_e')$

La condition de glissement (34) et (33) nous donne alors directement les densités de sources :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2(M') = \vec{e}_2 \cdot \vec{n}(M') \\ \sigma_3(M') = \vec{e}_3 \cdot \vec{n}(M') \\ \sigma_4(M') = (\vec{e}_4 \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{n}(M') \end{array} \right. \tag{38}$$

Il reste à déterminer la densité de doublets normaux $\mu(M')$. Pour cela nous utiliserons la discontinuité du potentiel de double couche, et la condition supplémentaire que nous avons imposé, soit :

$$\varphi(M_i') - \varphi(M') = \frac{\mu(M')}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi(M_i') = 0 \tag{39}$$

d'où $$\frac{\mu(M')}{2} + \varphi(M') = 0 \qquad M' \in C_o \tag{40}$$

Supposons maintenant que la vitesse d'excitation forcée, est en cos ωt. La densité $\sigma(M')$ est alors de la forme :

$$\sigma(M',t) = \sigma^*(M') \cos \omega t \ , \tag{41}$$

ce qui implique nécessairement:

$$D \begin{cases} \sigma(M',t) = \sigma^*(M') \cos \omega t \\ \mu(M',t) = \mu^*(M') \cos \omega t + \mu^{**}(M') \sin \omega t \end{cases} \tag{42}$$

Le potentiel induit au point M par chacune des trois densités de singularités de l'arc élémentaire d_M de C_0 s'écrit:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\sigma^*}(M) &= \sigma^*(M').K(M,M').d\ell_M.\cos\omega t + \sigma^*(M').L(M,M').d\ell_M.\sin\omega t \\ \Phi_{\mu^*}(M) &= \mu^*(M').P(M,M').d\ell_M.\cos\omega t + \mu^*(M').Q(M,M').d\ell_M.\sin\omega t \\ \Phi_{\mu^{**}}(M) &= -\mu^{**}(M').Q(M,M').d\ell_M.\cos\omega t + \mu^{**}(M').P(M,M').d\ell_{M'}.\sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Les equations intégrales exprimant la relation (40) sont alors les suivantes:

$$\frac{\mu^*(M)}{2} + \int_{C_o} \left[\mu^*(M')\ P(M,M') - \mu^{**}(M')\ Q(M,M')\right] d\ell_{M'} = - \int_{C_o} \sigma^*(M')\ K(M,M')\ d\ell_{M'} \tag{45}$$

$$\frac{\mu^{**}(M)}{2} + \int_{C_o} \left[\mu^*(M')\ Q(M,M') + \mu^{**}(M')\ P(M,M')\right] d\ell_{M'} = - \int_{C_o} \sigma^*(M')\ L(M,M')\ d\ell_{M'} \tag{46}$$

1.3. *Résolution du problème discrétisé*

Pour résoudre le système (45) , (46) , nous allons supposer que sa solution est peu différente de celle du problème discrétisé qui consiste à remplacer le contour C_o par une ligne polygonale à N côtés, et à supposer que chacun des segments Sj supporte des densités constantes σ^*_j, μ^*_j, μ_j^{**} (les σ^*_j étant connus d'après (38)).

On a alors à résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_i^*}{2} + \sum\limits_{j=1}^{N} \left[\mu_j^*\ P_{ij} - \mu_j^{**}\ Q_{ij}\right] = - \sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j^*\ K_{ij} & (47) \\ & i = 1, \ldots . N \\ \dfrac{\mu_i^{**}}{2} + \sum\limits_{j=1}^{N} \left[\mu_j^*\ Q_{ij} + \mu_j^{**}\ P_{ij}\right] = - \sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j^*\ L_{ij} & (48) \end{cases}$$

en adoptant une convention qui fait désigner par l'indice j l'élément influençant (la facette S_j), et par l'indice i l'élément influencé (le point de contrôle M_i, milieu de la facette S_i).

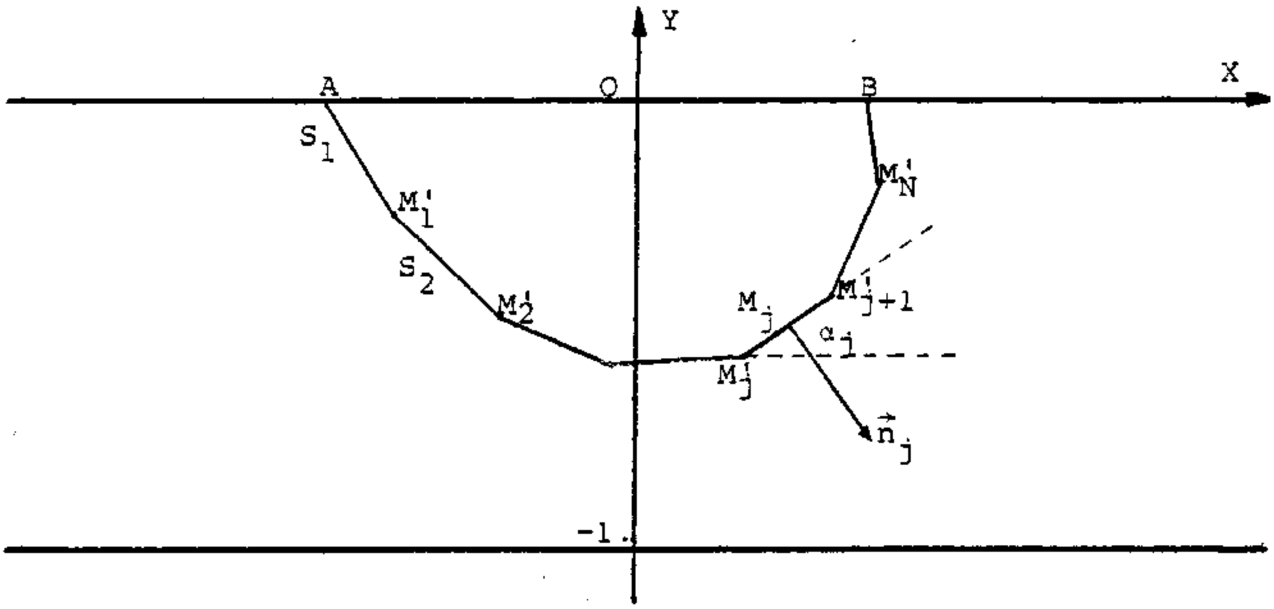

Figure 4: Discrétisation du contour.

Pour l'écriture matricielle et la résolution numérique, nous avons adopté les grandeurs adimensionnelles suivantes :

- mouvements forcés d'indices k = 2 et 3

$$\tilde{\mu}^{*} = \frac{u^{*}}{h\,C_k} \quad , \quad \tilde{\mu}^{**} = \frac{u^{**}}{h\,C_k} \quad , \quad \tilde{\sigma}^{*} = \frac{\sigma^{*}}{C_k} \quad ,$$

- k = 4

$$\tilde{\mu}^{*} = \frac{\mu^{*}}{h^2\,\Omega} \quad , \quad \tilde{\mu}^{**} = \frac{u^{**}}{h^2\,\Omega} \quad , \quad \tilde{\sigma}^{*} = \frac{\sigma^{*}}{h\,\Omega}$$

Le système (47), (48) s'écrit maintenant sous la forme de l'équation matricielle linéaire de rang 2N :

$$\left[\begin{bmatrix} P_{ij} & -Q_{ij} \\ Q_{ij} & P_{ij} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} I \right] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mu}^{*}_j \\ \tilde{\mu}^{**}_j \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{ij} \\ L_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^{*}_j \end{bmatrix} \qquad (49)$$

Les matrices de coefficients d'influence P_{ij} , Q_{ij} , K_{ij} , L_{ij} représentent les potentiels générés aux points M_i , milieux des segments Si , par les singularités réparties sur les segments $S_j(M'_j, M'_{j+1})$.

L'expression du potentiel engendré au point M de coordonnées réduites (X,Y) par une source puisante de débit $q = q^* \cos wt$ placée en M'(X',Y') est la suivante :

$$\Phi(M,M',t) = \Phi^{*}(M,M')\cos \omega t + \Phi^{**}(M,M')\sin \omega t \qquad (50)$$

avec :

$$\Phi^* = q^* \frac{1}{M_o} \frac{M_o^2 - K_o^2}{M_o^2 - K_o^2 + K_o} \operatorname{ch} M_o(Y'+1) \operatorname{ch} M_o(Y+1) \sin M_o |X-X'| \tag{51}$$

$$- q^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k} \frac{M_k^2 + K_o^2}{M_k^2 + K_o^2 - K_o} \cos M_k(Y'+1) \cos M_k(Y+1) e^{-M_k|X-X'|}$$

$$\Phi^{**} = - q^* \frac{1}{M_o} \frac{M_k^2 + K_o^2}{M_k^2 + K_o^2 - K_o} \operatorname{ch} M_o(Y'+1) \operatorname{ch} M_o(Y+1) \cos M_o(X-X') \tag{52}$$

où $\begin{cases} M_o \operatorname{th} M_o = K_o \\ M_k \operatorname{tg} M_k = - K_o \end{cases}$ et $K_o = \dfrac{\omega^2 h}{g}$

Les calculs menant de cette formulation aux coefficients P_{ij} , Q_{ij} , K_{ij} , L_{ij} étant longs et fastidieux, nous nous bornerons à ne citer ici que leur expression finale dans les tableaux I et II ci-après.

Les notations sont les suivantes :

$M'_j \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \end{bmatrix}$ et $M'_{j+1} \begin{bmatrix} X_{j+1} \\ Y_{j+1} \end{bmatrix}$: origine et extrémité du segment S_j.

$M_i \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix}$: point de contrôle, milieu de S_j.

$M_{oij} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_j + \dfrac{X_i - X_j}{X_{j+1} - X_j} (Y_{j+1} - Y_j) \end{bmatrix}$: projection verticale du point M_i sur le segment S_j.

α_j : angle polaire du segment S_j. sur l'horizontale (figure 4)

$\zeta_{ij} = (\bar{Z}_j - X'_i - i)$

$\varepsilon_{ij} = \dfrac{X_i - X_j}{|X_i - X_j|}$

$\eta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } Y_i > Y_{oij} \\ \frac{1}{2} \text{ si } Y_i < Y_{oij} \end{cases}$

On peut remarquer que, le potentiel de simple couche étant continu, il n'y a pas de problème particulier de détermination pour l'influence du segment sur son point milieu, c'est-à-dire pour le calcul de K_{jj} et L_{jj}.

Pour résoudre le système linéaire (49) , il ne nous reste plus qu'à exprimer, les valeurs des densités de source adimensionnelle $\tilde{\sigma}^{*}_{j}$.

TABLEAU I : COEFFICIENTS D'INFLUENCE LIES AUX SEGMENTS DE SOURCES PULSANTES.

$$L_{ij} = -\frac{1}{M_o^2}\frac{M_o^2 - K_o^2}{M_o^2 - K_o^2 + K_o}\, ch\, M_o(Y_i+1) . R_e\left\{ e^{i\alpha_j}\left[\sin M_o\, \zeta_{ij+1} - \sin M_o\, \zeta_{ij}\right]\right\} \quad (53)$$

$$K_{ij} = \delta K_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} K_{ij}^{k} \qquad \text{avec} \quad : \quad (54)$$

$$K_{ij}^{o} = \frac{1}{M_o^2}\frac{M_o^2 - K_o^2}{M_o^2 - K_o^2 + K_o}\, ch\, M_o(Y_i+1)\; R_e\left\{ e^{i\alpha_j}\left[\varepsilon_{ij+1} . \cos M_o\, \zeta_{ij+1} - \varepsilon_{ij} \cos M_o\, \zeta_{ij}\right]\right\} \quad (55)$$

$$K_{ij}^{k} = -\frac{1}{M_k^2}\frac{M_k^2 + K_o^2}{M_k^2 + K_o^2 - K_o}\cos M_k(Y_i+1)\; R_e\left\{ e^{i\alpha_j}\left[\varepsilon_{ij+1} . e^{M_k \varepsilon_{ij+1} \zeta_{ij+1}} - \varepsilon_{ij} . e^{M_k \varepsilon_{ij} \zeta_{ij}}\right]\right\} \quad (56)$$

$$\delta K_{ij} = (1 - \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij+1}) \left|\cos \alpha_j\right| . \frac{1}{2}\left\{(Y_i + \frac{1}{K_o}) - \eta_{ij}(Y_{oij} - Y_i)\right\} \quad (57)$$

TABLEAU II: COEFFICIENTS D'INFLUENCE LIES AUX SEGMENTS DE DOUBLETS NORMAUX PULSANTS.

$$Q_{ij} = \frac{1}{M_o}\frac{M_o^2 - K_o^2}{M_o^2 - K_o^2 + K_o}\, ch\, M_o(Y_i+1)\; I_m\left\{\cos M_o\, \zeta_{ij+1} - \cos M_o\, \zeta_{ij}\right\} \quad (58)$$

$$P_{ij} = \delta P_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} P_{ij}^{k} \qquad \text{avec} \quad : \quad (59)$$

$$P_{ij}^{o} = \frac{1}{M_o}\frac{M_o^2 - K_o^2}{M_o^2 - K_o^2 + K_o}\, ch\, M_o(Y_i+1)\; I_m\left\{\sin M_o\, \varepsilon_{ij+1}\, \zeta_{ij+1} - \sin M_o\, \varepsilon_{ij}\, \zeta_{ij}\right\} \quad (60)$$

$$P_{ij}^{k} = \frac{1}{M_k}\frac{M_k^2 + K_o^2}{M_k^2 - K_o^2 - K_o}\cos M_k(Y_i+1)\; I_m\left\{ e^{M_k \varepsilon_{ij+1} \zeta_{ij+1}} - e^{M_k \varepsilon_{ij} \zeta_{ij}}\right\} \quad (61)$$

$$\begin{cases} \delta P_{ij} = -\varepsilon_{ij}\,(1 - \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij+1})\, \eta_{ij} & \text{pour} \quad i \neq j \\ \delta P_{jj} = -\dfrac{\varepsilon_{jj}}{2} & \end{cases} \quad (62)$$

Selon le mouvement considéré, nous aurons :

$$\tilde{\sigma}^*_{2j} = \sin \alpha_j = \frac{Y_{j+1} - Y_j}{|Z_{j+1} - Z_j|} \tag{63}$$

$$\tilde{\sigma}^*_{3j} = - \cos \alpha_j = - \frac{X_{j+1} - X_j}{|Z_{j+1} - Z_j|} \tag{64}$$

$$\tilde{\sigma}^*_{4j} = - \frac{|Z_{j+1}|^2 - |Z_j|^2}{2|Z_{j+1} - Z_j|} \tag{65}$$

Nous connaissons maintenant tous les éléments permettant de calculer la solution numérique de (49).

La résolution numérique du système ne pose pas de problème en elle-même ; par contre, la mise en oeuvre des formules donnant les coefficients P_{ij} (59) et (61) fait apparaître des difficultés numériques.

En effet, en examinant ces expressions on voit que la convergence de la série :

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k} \frac{M_k^2 + K_o^2}{M_k^2 + K_o^2 - K_o} \cos M_k(Y_i+1)\, \mathrm{I}_m \left\{ e^{M_k \varepsilon_{ij+1} \zeta_{ij+1}} - e^{M_k \varepsilon_{ij} \zeta_{ij}} \right\} \tag{66}$$

si elle est assurée analytiquement, peut être très lente puisque le terme d'ordre k est globalement en $1/M_k$ avec (M_k - $k\pi$, $k \to \infty$). On assiste dans certains cas, à une convergence oscillante, particulièrement difficile à tester numériquement.

Nous nous sommes donc attachés à accélérer et rationaliser ce calcul en calculant analytiquement la somme de la série $\mathbb{S}$ (67) en 1/k , et en ne calculant numériquement que les termes de la série $S_{ij} - \mathbb{S}$ qui,elle, converge rapidement et ne pose pas de problèmes.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \cos(k\pi\, x)\, \mathrm{I}_m \left\{ e^{k\pi z} \right\} = K - \mathrm{I}_m \left\{ \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} \left(-e^{\pi(z+ix)} - 1\right)\left(e^{\pi(z-ix)} - 1\right) \right\} \tag{67}$$

où la constante K dépend de la détermination du logarithme.

Ainsi nous sommes arrivés, pour P_{ij} , à l'expression donnée dans le tableau III ci-dessous, qui nous a permis d'accélérer sensiblement le calcul, tout en augmentant sa précision.

TABLEAU III: COEFFICIENTS D'INFLUENCE LIES AUX SEGMENTS DE DOUBLETS NORMAUX PULSANTS. seconde formulation.

$$Q_{ij} \text{ - voir tableau II} \quad ; \qquad P_{ij} = P^{o}_{ij} + S_{ij} + \delta P_{ij}$$

avec

$$P^{o}_{ij} \text{ - voir tableau II} \quad ; \qquad \delta P_{ij} \text{ - voir tableau II}$$

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{M_k} \frac{M_k^2 + K_o^2}{M_k^2 + K_o^2 - K_o} \cos M_k (Y_i + 1) \, I_m \left\{ e^{M_k \varepsilon_{ij+1} \zeta_{ij+1}} - e^{M_k \varepsilon_{ij} \zeta_{ij}} \right\}$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos k\pi (Y_i - 1)}{k\pi} I_m \left\{ e^{k\pi \varepsilon_{ij+1} \zeta_{ij+1}} - e^{k\pi \varepsilon_{ij} \zeta_{ij}} \right\} \qquad (68)$$

$$- \frac{1}{2\pi} I_m \left\{ \mathcal{L}og(e^{\pi(\varepsilon_{ij+1}\zeta_{ij+1} + iY_i + i)} - 1) + \mathcal{L}og(e^{\pi(\varepsilon_{ij+1}\zeta_{ij+1} - iY_i + i)} - 1) \right.$$

$$\left. - \mathcal{L}og(e^{\pi(\varepsilon_{ij}\zeta_{ij} + iY_i + i)} - 1) - \mathcal{L}og(e^{\pi(\varepsilon_{ij}\zeta_{ij} - iY_i - i)} - 1) \right\}$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{L}og(z) = \log(-z) - i\pi & \text{si } -\pi < I_m(\log z) < \pi \\ \mathcal{L}og(z) = \log(z) & \text{si } 0 < I_m(\log z) < 2\pi \end{cases} \qquad (69)$$

selon les calculateurs

2. Coefficients hydrodynamiques

2.1. Rappels théoriques

On se propose maintenant de calculer les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur le cylindre au cours d'un mouvement forcé.

Grâce aux hypothèses formulées au départ, l'équation de LAGRANGE linéarisée s'écrit simplement :

$$p = - \rho g z - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad , \qquad (6)$$

et les forces hydrodynamiques par unité de longueur qui en découlent :

$$\vec{F} = \rho \int_{C_o} \frac{\partial \psi}{\partial t} \vec{n} \, d\ell \qquad (70)$$

$$\vec{M_\Delta} = \rho \int_{C_o} \frac{\partial \psi}{\partial t} (\vec{OM} \wedge \vec{n}) \, d\ell \qquad (71)$$

Rappelons que le potentiel ψ , solution du problème cinématique, s'écrit pour le mouvement d'indice k :

$$\psi_k(M,t) = \Phi_k^{*} \cos \omega t + \Phi_k^{**} \sin \omega t \qquad (72)$$

On écrit donc (70) et (71) en projection sur l'axe ℓ de la façon suivante :

$$F_{\ell k} = - \rho\omega \sin \omega t \int_{C_o} \Phi_k^{*} (\vec{n}.\vec{e}_\ell) d\ell + \rho\omega \cos \omega t \int_{C_o} \Phi_k^{**} (\vec{n}.\vec{e}_\ell) d\ell \qquad (73)$$

$$M_{4k} = - \rho\omega \sin \omega t \int_{C_o} \Phi_k^{*} (\vec{OM} \wedge \vec{n}).\vec{e}_4 \, d\ell + \rho\omega \cos \omega t \int_{C_o} \Phi_k^{**} (\vec{OM} \wedge \vec{n}).\vec{e}_4 \, d\ell \qquad (74)$$

D'après la résolution du problème cinématique, nous allons pouvoir remplacer directement les termes tels que $(\vec{n}.\vec{e}_\ell)$ par les densités de sources σ_ℓ^{*}, et les potentiels Φ_k par les densités de doublets normaux μ_k.

Nous voyons ici qu'un des avantages de la distribution mixte (34) est qu'elle donne directement les densités de doublets qui s'identifient au potentiel sur le corps, ou encore a la pression dynamique à un coefficient multiplicateur près (6).

L'emploi d'une méthode n'utilisant que des singularités de type source nous aurait obligé à recalculer, une fois les densités connues, l'influence en potentiel de chaque facette sur chaque point de contrôle.

Finalement, pour tout mouvement forcé sinusoïdal, de pulsation *w* nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{F_2}{\rho h^2} \\ \dfrac{F_3}{\rho h^2} \\ \dfrac{M_4}{\rho h^3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} CM_{22} & CM_{23} & CM_{24} \\ CM_{32} & CM_{33} & CM_{34} \\ CM_{42} & CM_{43} & CM_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ h\ddot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} CA_{22} & CA_{23} & CA_{24} \\ CA_{32} & CA_{33} & CA_{34} \\ CA_{42} & CA_{43} & CA_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \omega\dot{X} \\ \omega\dot{Y} \\ \omega h\dot{\theta} \end{bmatrix} \qquad (75)$$

avec

$$\begin{cases} CM_{k\ell} = \displaystyle\int_{C_o} \tilde{\mu}_k^{*} \, \tilde{\sigma}_\ell^{*} \frac{d\ell}{h} \\ CA_{k\ell} = \displaystyle\int_{C_o} \tilde{\mu}_k^{**} \, \tilde{\sigma}_\ell^{*} \frac{d\ell}{h} \end{cases} \qquad (76)$$

2.2.Déterminationnumériquedescoefficientshydrodinamiques

Comme dans le cas du problème cinématique, nous approcherons les intégrales sur C_o de (76) par des sommes finies sur le contour polygonal utilisé dans (40).

Soit :

$$\begin{cases} CM_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \tilde{\mu}_{kn}^{*} \, \tilde{\sigma}_{\ell n}^{*} \, |z_n - z_{n+1}| \\ CA_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \tilde{\mu}_{kn}^{**} \, \tilde{\sigma}_{\ell n}^{*} \, |z_n - z_{n+1}| \end{cases} \qquad (77)$$

avec :

$$\tilde{\sigma}^*_{2n} = \frac{Y_{n+1} - Y_n}{|Z_n - Z_{n+1}|} \quad \text{pour l'embardée}$$

$$\tilde{\sigma}^*_{3n} = - \frac{X_{n+1} - X_n}{|Z_n - Z_{n+1}|} \quad \text{pour le pilonnement}$$

$$\tilde{\sigma}^*_{4n} = - \frac{|Z_{n+1}|^2 - |Z_n|^2}{2\,|Z_{n+1} - Z_n|} \quad \text{pour le roulis}$$

2.3. Appliaction au cas du cylindre circulaire semi-immergé

Le programme de calcul fondé sur la théorie que nous venons d'exposer a été tout d'abord testé sur un corps très simple : le cylindre circulaire semi-immergé. Ce choix tient bien entendu à la simplicité du corps, mais rend également possible la comparaison avec d'autres travaux.

Nous présentons sur la figure 5 les coefficients de masse d'eau ajoutée, et d'amortissement pour les mouvements de pilonnement et d'embardée.

Les calculs ont été faits pour deux profondeurs d'eau $\frac{h}{R} = 2$, $\frac{h}{R} = 4$.

On observe que pour les grands nombres d'ondes,donc les petites longueurs d'ondes, les différentes courbes en profondeur finie sont asymptotes des courbes en profondeur infinie obtenues par la méthode de FRANK / 4 /.

A l'inverse, pour les petits nombres d'ondes, les courbes divergent d'autant plus que la profondeur est plus faible.

Enfin, nous avons porté les valeurs asymptotiques de CM_{33} et CA_{33} quand w^2 R/g → 0 données par K.J. 3AI / 5/. Nos courbes s'arrêtent à w^2 R/g = 0.3 mais semblent visiblement en très bon accord avec les points de BAI.

Toutes ces observations nous ont conduit à estimer que notre programme de calcul était opérationnel pour ce corps simple. Nous l'avons ensuite utilisé pour calculer les coefficients hydrodynamiques de cylindres de section rectangulaire aux coins arrondis ou non. Les résultats étant là encore satisfaisants nous avons pu intégrer ce programme de calcul dans un programme de résolution tridimensionnel par une méthode de tranches.

2.4. Fréquences irrégulières

Avant de présenter cette application, nous nous attarderons quelques instants sur le phénomène dit : de fréquences irrégulières, classique dans ce type de résolution.

Sur la figure 6, nous voyons que autour du nombre d'ondes w^2 R/g = 1.825, les courbes de coefficients hydrodynamiques présentent des discontinuités avec des branches infinies de très forte pente.

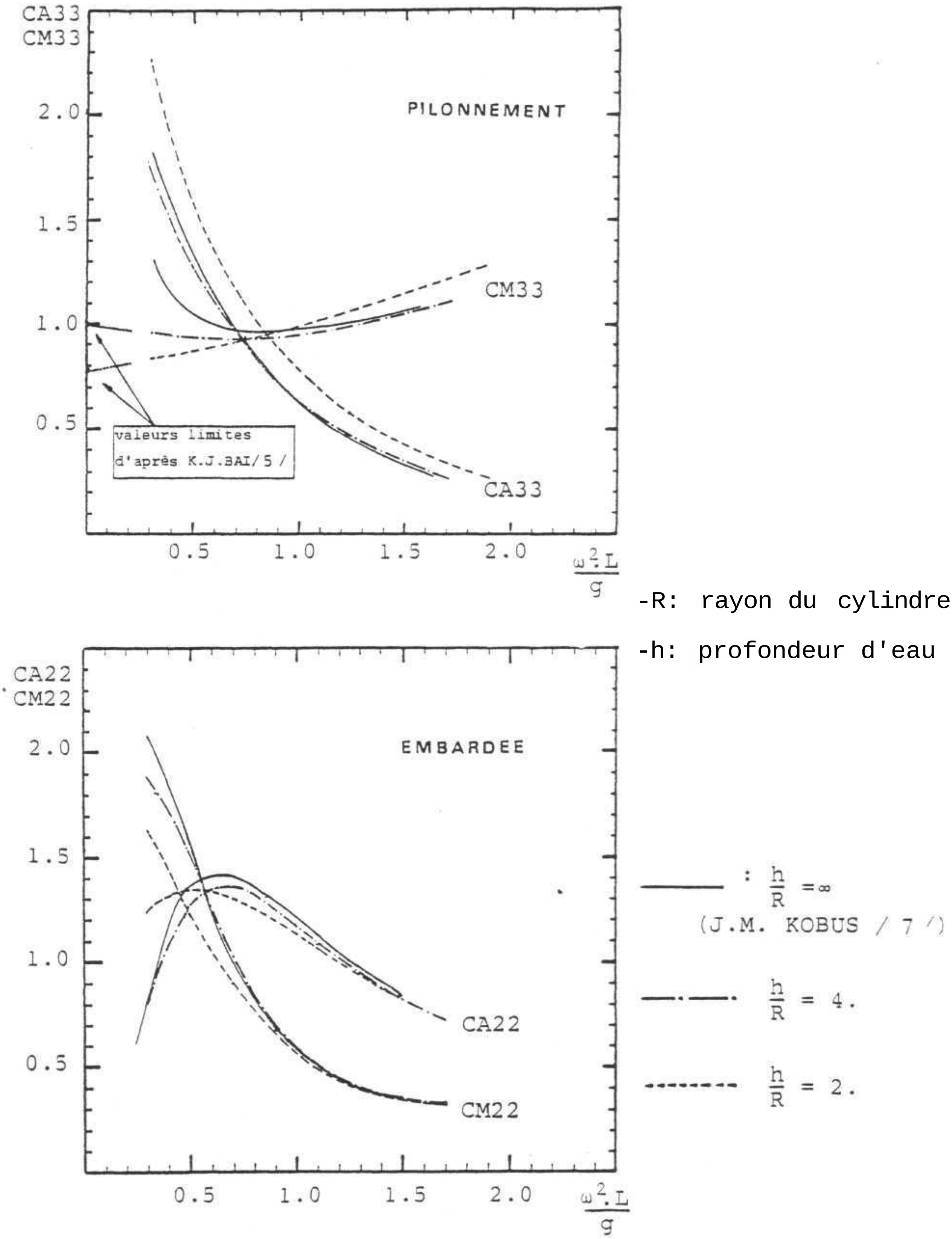

Figure 5 : COEFFICIENTS HYDRODYNAMIQUES POUR UN CYLINDRE CIRCULAIRE SEMI IMMERGE.

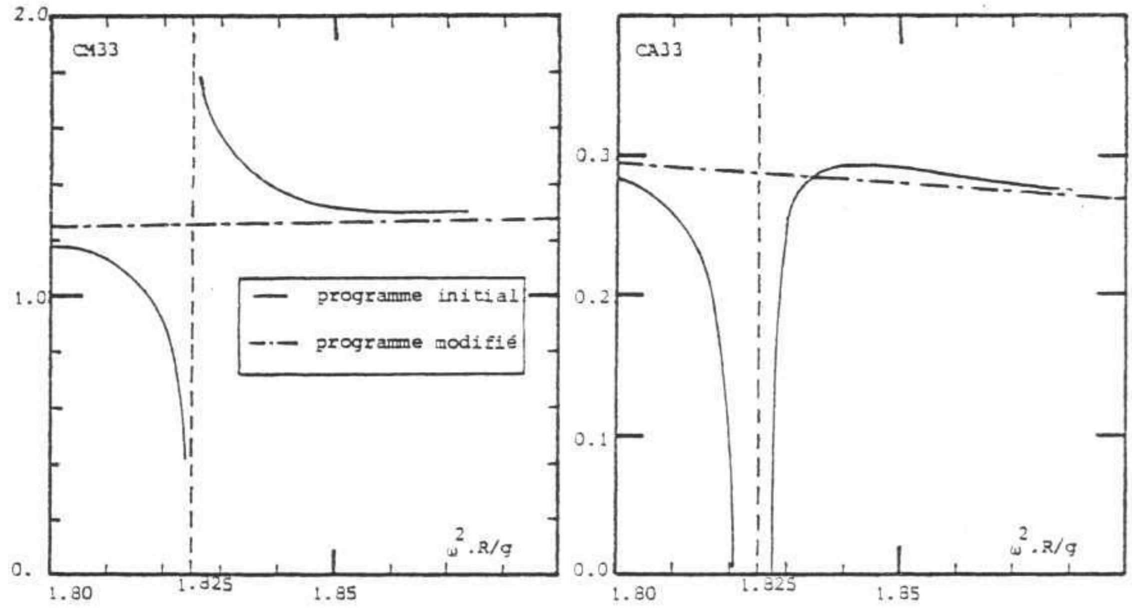

Figure 6 : FREQUENCES IRREGULIERES. CYLINDRE CIRCULAIRE, $\frac{h}{R} = 2$.

L'explication correcte de ce phénomène (OHMATU /6/) est la suivante :

Quand nous avons écrit la méthode de résolution utilisant la distribution mixte (σ(M')/ μ(M')), nous avons imposé dans le domaine fluide intérieur (τ_i) :

$\Delta\Phi = 0$ dans (τ_i)

$\Phi = 0$ sur la face intérieure de C_0

$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = k_o \Phi$ sur le segment AB (figure 2).

Si la troisième condition était : $\Phi = 0$ sur AB, (ou $\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = 0$) on aurait toujours $\Phi = 0$ partout dans τ_i. Mais le problème mathématique formulé ci-dessus admet, pour des valeurs discrètes du nombre d'ondes, des solutions propres non identiquement nulles dans τ_i. Dans ces cas précis, l'utilisation de la discontinuité de double couche pour construire les équations intégrales comme nous l'avons fait, conduit forcément aux résultats erronés de la page **22**.

Pour éliminer ces fréquences irrégulières, nous avons imposé : $\Phi_i = 0$ en deux points du segment AB relativement proches de A et de B. Ceci n'annihile pas le phénomène, mais le renvoie dans une gamme de fréquences trop élevées pour être réalistes dans le cadre du problème traité.

Comme ces deux points de contrôle supplément-aires ajoutent deux fois deux lignes au système (49), nous avons choisi comme inconnues supplémentaires les pentes des distributions linéaires de doublets que nous avons placés sur les segments d'extrémité

S_l et S_N qui ont un point commun avec la surface libre ,

La figure 6 montre que cette méthode d'élimination des fréquences irrêgulières tirée de la thèse de J.M KOBUS/7/, est particulièrement efficace.

C - APPLICATION DE LÀ METHODE DES TRANCHES A UN NAVIRE TEMOIN

1. Détermination des potentiels tridimensionnels à partir des potentiels bidimensionnels

Nous avons proposé dans la deuxième partie une méthode de calcul des potentiels de radiation pour une tranche d'épaisseur unitaire. Il s'agit désormais de déterminer les potentiels tridimensionnels $\Phi_j(x,y,z)$ $j \in [2,6]$ à partir des potentiels obtenus pour les trois mouvements bidimensionnels (embardée, pilonnement et roulis).

Désignons par F(n,m) la facette de longueur Δx_n et de largeur ℓ_m (ℓ_m étant la longueur du segment S_m de la tranche n) . Les potentiels Φ'_{jnm} sont obtenus pour les mouvements d'embardé de pilonnement et de roulis, après une simple multiplication par Δx_n des potentiels unitaires correspondants. Les potentiels Φ'_{jnm} relatifs aux mouvements de tangage et de lacet sont les produits des potentiels de pilonnement et d'embardée par l'abscisse x_n de la tranche, en tenant compte du signe imposé par le trièdre direct.

$$\Phi'_{5nm}(x,y,z) = - x_n \; \Phi'_{3nm}(x,y,z) \tag{78}$$

$$\Phi'_{6nm}(x,y,z) = + x_n \; \Phi'_{2nm}(x,y,z) \tag{79}$$

2. Détermination des masses d'eau ajoutée et des termes d'amortissement

Nous avons donné au paragraphe A.4 une formulation des masses d'eau ajoutée et des termes d'amortissement que nous remplacerons par :

$$\begin{aligned} MA_{ij} &= - \frac{\rho}{\omega^2} \iint_C \Phi'^{*}_j \frac{\partial \Phi'^{*}_j}{\partial n} \, ds \\ TA_{ij} &= - \frac{\rho}{\omega} \iint_C \Phi'^{**}_j \frac{\partial \Phi'^{*}_i}{\partial n} \, ds \end{aligned} \tag{80}$$

Cependant le calcul de ces termes peut être fait plus simplement à partir des masses d'eau ajoutée et des termes d'amortissement obtenus pour une tranche d'épaisseur unité.

Soient ma_{ijn} et ta_{ijn} les masses d'eau ajoutée et les termes d'amortissement bidimensionnels pour une tranche d'épaisseur Δx_n , obtenus en rendant dimensionnels les coefficients CM_{ijn} et CA_{ijn}. Nous pouvons alors écrire :

$$MA_{22} = \sum_{n=1}^{N} ma_{22n} \qquad\qquad TA_{22} = \sum_{n=1}^{N} ta_{22n}$$

$$MA_{24} = MA_{42} = \sum_{n=1}^{N} ma_{24n} \qquad TA_{24} = TA_{42} = \sum_{n=1}^{N} ta_{24n}$$

$$MA_{26} = MA_{62} = \sum_{n=1}^{N} ma_{22n}\, x_n \qquad TA_{26} = TA_{62} = \sum_{n=1}^{N} ta_{22n}\, x_n$$

$$MA_{33} = \sum_{n=1}^{N} ma_{33n} \qquad TA_{33} = \sum_{n=1}^{N} ta_{33n}$$

$$MA_{35} = MA_{53} = -\sum_{n=1}^{N} ma_{33n}\, x_n \qquad TA_{35} = TA_{53} = -\sum_{n=1}^{N} ta_{33n}\, x_n$$

$$MA_{44} = \sum_{n=1}^{N} ma_{44n} \qquad TA_{44} = \sum_{n=1}^{N} ta_{44n}$$

$$MA_{46} = MA_{64} = \sum_{n=1}^{N} ma_{24n}\, x_n \qquad TA_{46} = TA_{64} = \sum_{n=1}^{N} ta_{24n}\, x_n$$

$$MA_{55} = \sum_{n=1}^{N} ma_{33}\, x_n^2 \qquad TA_{55} = \sum_{n=1}^{N} ta_{33n}\, x_n^2$$

$$MA_{66} = \sum_{n=1}^{N} ma_{22}\, x_n^2 \qquad TA_{66} = \sum_{n=1}^{N} ta_{22n}\, x_n^2$$

Ces calculs étant effectués, nous disposons de tous les termes qui interviennent dans l'équation de NEWTON. Dès lors la résolution du système de dix équations à dix inconnues (8) nous permet de déterminer les amplitudes et les phases des translations et des rotations.

3. Résultats obtenus pour un navire témoin

3.1. Choix du navire et des conditions d'essais

Nous avons éprouvé notre programme en calculant les mouvements d'un pétrolier de 240.OQO Tdw précédemment essayé en bassin au N.S.M.B. par G. VAN OORTMERSSEN / 8/. Notre choix a été guidé par le soucis d'obtenir des résultats numériques concernant un navire élancé pour lequel nous possédions toutes les. caractéristiques et les résultats expérimentaux.

Les caractéristiques principales du navire sont :

- Longueur entre perpendiculaires $L = 310.00$ m
- Bau maximal $B = 47.17$ m
- Tirant d'eau $T = 18.90$ m
- Coordonnées du centre de gravité
  - . abscisse de la section 10 $X_{10} = -6.61$ m
  - . cote du centre de gravité $z_G = -5.58$ m
- Hauteur métacentrique (roulis) $(\rho - a) = 5.78$ m
- Rayons de giration $R_{OX} = 17.89$ m, $R_{OY} = 77.67$ m, $R_{OZ} = 77.47$ m
- Déplacement $\Delta = 240697$ T
- Bloc coefficient $C_b = 0.85$
- Coefficient prismatique $C_p = 0.95$

Les courbes représentatives des résultats numériques ont été tracées pour des périodes de la houle incidente variant de 7s à 35s , pour trois angles d'incidence : β = 90°, β = 135° et β = 180° , et pour une profondeur d'eau h = 27.70 m (soit un rapport profondeur sur tirant d'eau : δ =1.2).

3.2. *Présentation des résultats*

L'hypothèse de linéarité impose à l'amplitude de la réponse d'être proportionnelle à l'amplitude de l'excitation. Les amplitudes η_j des mouvements ont donc été réduites par rapport à l'amplitude A de la houle incidente. Il s'en suit que les translations sont adimensionnelles (η_j $j \in [1,3]$ et les rotations sont en degré par mètre (η_j $j \in [4,6]$).

3.3. Analyse des résultats

Les résultats expérimentaux concernant le cavalement ont été reproduits afin de montrer la différence d'ordre de grandeur qui existe entre les amplitudes η_1 et η_3 principalement pour β = 90° ainsi que pour β = 135° et 180° quand $\omega\sqrt{L/g}$ >2 (T<20s).

Les résultats concernant les mouvements de pilonnement et de tangage sont satisfaisants. Notons toutefois que la limite de l'amplitude de la réponse en tangage, quand $\omega\sqrt{L/g}$ tend vers zéro, est théoriquement nulle ce que nos calculs mettent en évidence.

Les résultats concernant les mouvements pairs sont en bon accord avec l'expérience. Cependant les calculs mettent en évidence un couplage embardée-roulis et une résonance en roulis plus accentués que ceux déterminés par l'expérience. Une telle différence s'explique par l'hypothèse du fluide parfait qui ne saurait prendre en compte l'amortissement visqueux particulièrement important lors de la résonance en roulis.

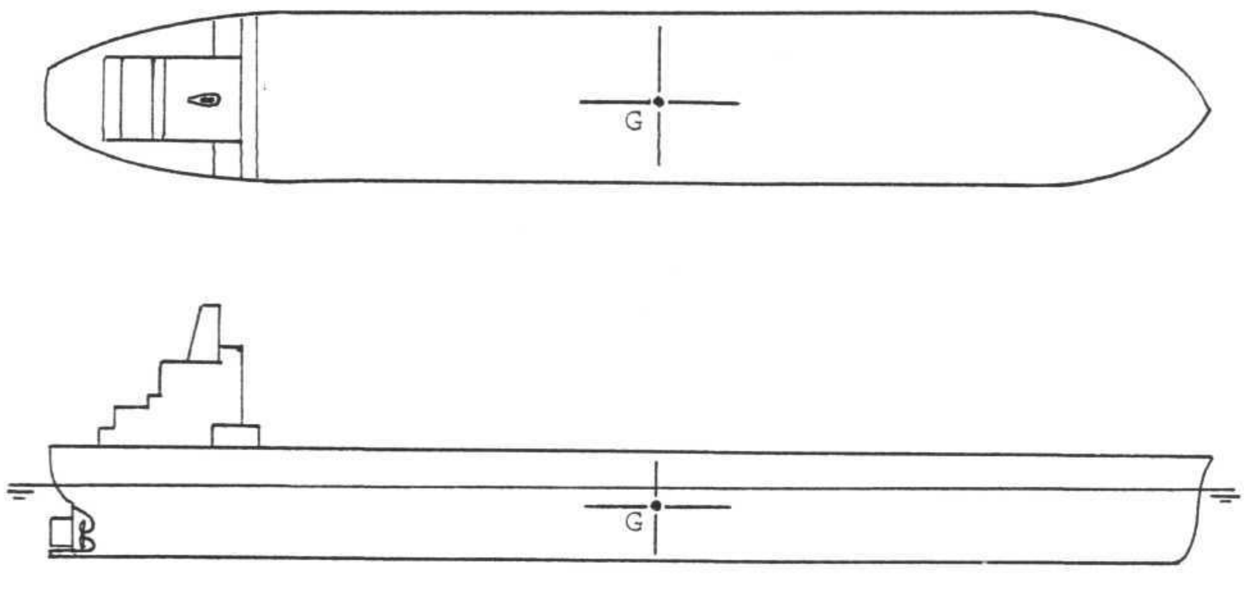

Figure 7 : SCHEMA DU NAVIRE TEST

AMPLITUDE DES MOUVEMENTS

Les courbes représentent les résultats obtenus par le calcul;

Les points matérialisent les résultats expérimentaux publiés par G VAN OORTMERSSEN.

A est l'amplitude de la houle incidente et w sa pulsation.

L est la longueur du navire; g est la constante de gravité.

• Angle d'incidence : β = 90°

+ Angle d'incidence : β = 135°

o Angle d'incidence : β = 180°

$\delta = \dfrac{\text{Profondeur}}{\text{Tirant d'eau}} = 1.2$

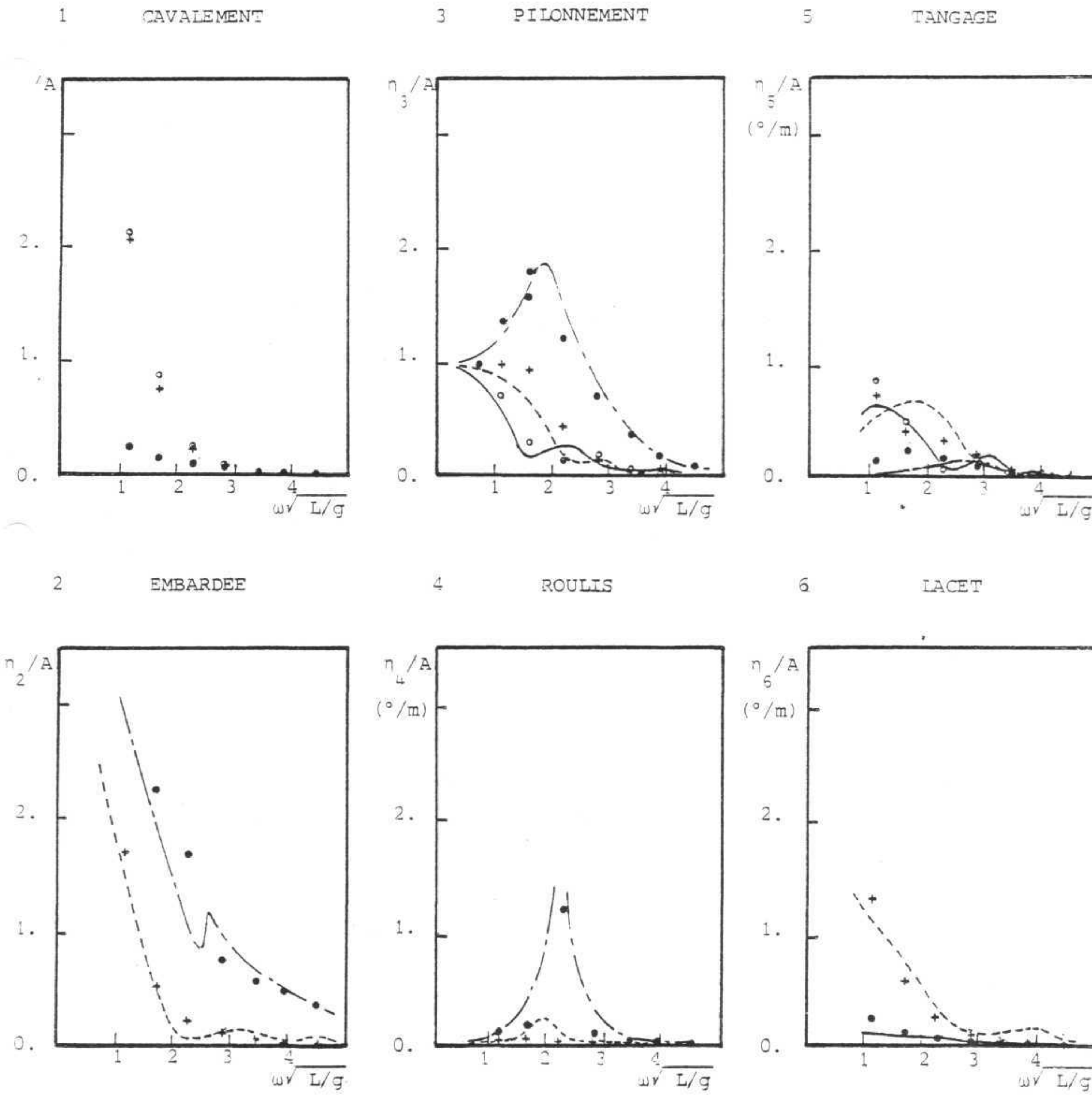

Figure 8

4. Conclusion

Notre programme de calcul par la méthode des tranches des mouvements d'un navire élance soumis à une houle incidente quelconque pour un nombre de FROUDE nul et pour une profondeur limité, fournit des résultats convenables qui permettent de conclure à sa validité dans le cadre défini par l'hypothèse de linéarité et l'hypothèse du navire élancé.

BIBLIOGRAPHIE

1 John F., "On the motion of floating bodies (I and II)" Communication on pure and Applied Mathematics Vol. 2 and 3 New York 1950

2 Wehausen J.V. et E. Laitone/"Surface waves" Handbuch der Physik Vol. IX, 1960

3 Guevel P. "Cours de la Section Spéciale d'Hydrodynamique Navale" Nantes 1978

4 Frank W. "Oscillations of cylinders in or below the free surface of deep fluids" N.S.R.D.C. Washington D.C. Report 2375/1967

5 Bai K.J., "The added mass of two dimensional cylinders heaving in water of finite depht" Journal of Fluid Mechanics Vol. 8l, part 1, juin 1977

6 Ohmatsu S., "On the irregular frequencies in the theory of oscillating bodies in a free surface" Papers of Ship Research Institute n° 48, janvier 1975

7 Kobus J.M., "Application de la méthode des singularités au problème des flotteurs cylindriques soumis à des oscillations harmoniques forcées de faible amplitude" Thèse de Docteur-ingénieur, Nantes, mai 1976

8 Van Oortmerssen G. , "The motions of a ship in shallow water" Océan Engineering, Vol. 3 n° 4, Août 1976

9 Bai K.J. et Yeung, "Numerical solutions to free-surface flow problems" lOeme Symposium Naval Hydrodynamics, 1974

10 Beck et Tuck, "Computation fo shallow water ship motions" 9ème Symposium of Naval Hydrodynamics, Paris 1972

11 Bougis J., "Application de la méthode des tranches à la détermination des forces et moment de dérive sur houle d'un navire au point fixe" Rapport de recherche, juin 1978

12 Euvrard D., Jami À., Morice C. et Ousset Y., "Calcul numérique des oscillations d'un navire engendrées par la houle" Journal de Mécanique, Vol. 16 n° 2 et 3, Paris 1977

13 Guevel P., Daubisse J.C. et Delhommeau G., "Oscillations des corps flottants soumis aux actions de la houle" Bulletin de l'ATMA, 1978

14 Guevel P., Kobus J.M.,"Flotteurs cylindriques horizontaux soumis à des oscillations forcées de très faibles amplitudes" Bulletin de l'ATMA, Paris 1975

15 Korvin-Kroukowsky, "Theory of seakeeping" S.N.A.M.E. New York 1961

16 Ogilvie F. et Tuck E.O, "A rational strip theory of ship motions" part 1, Report n° 103 The University of Michigan Mars 1969

17 Salvesen N., Tuck E.O., Faltinsen O., "Ship motions and sea loads" S.N.A.M.E. Vol. 78 New York 1970

18 Sayer P. et Ursell F., "On the virtual mass, at long wave lengths, of a half-immersed circular cylinder heaving on water of finite depth" 11eme Symposium of Naval Hydrodynamics, Londres 1976

19 Sheridan J., "Computation of the velocity potential for a pulsating source in a fluid with free surface and finite depth" Naval Ship Research and Development center - Report SPD 652-01, décembre 1975

20 Yu et Ursell, "Surface waves generated by an oscillating circular cylinder on water of finite depth : theory and experiments" Journal of Fluid Mechanics Vol. II, 1961